

Chapitre XIX

ONDES PLANES ÉLECTROMAGNÉTIQUES.

Joël SORNETTE vous prie de ne pas utiliser son cours à des fins professionnelles ou commerciales sans autorisation.

Les applications de ce chapitre dans le monde actuel sautent aux yeux : nous vivons dans un monde de télécommunications : radio, télévision, téléphonie mobile, localisation par GPS, communications entre ordinateurs par Bluetooth ou WiFi, etc. qui relèvent toutes de la modulation d'ondes porteuses se propageant dans l'air qui a quasiment les mêmes propriétés que le vide en bonne approximation. Nous étudierons aussi la propagation dans un métal pour justifier le modèle du métal parfait et évoquer la propagation guidée (guide d'onde, câble coaxial). Enfin nous étudierons la propagation dans les milieux diélectriques et les problèmes de réflexion et de transmission d'ondes à l'interface entre deux milieux.

XIX-1 Ondes dans le vide

Tout d'abord, on ne s'étonnera pas qu'une onde puisse se propager en l'absence de charges et de courants. Une onde est effectivement générée par charges et courants mais peut se propager loin de l'endroit où elle est née, de même que les ronds dans l'eau s'éloignent du caillou qu'on a jeté. On se trouve *de facto* en dehors du cadre des régimes quasistationnaires puisqu'on suppose la distance des charges grande et non petite devant la longueur d'onde. Dans un chapitre ultérieur, on étudiera la genèse d'une onde dans un cas simple : le rayonnement du dipôle oscillant.

XIX-1.a Mise en équations

Dans le vide, il n'y a pas de charges donc pas de courants ($\rho = 0$ et $\vec{j} = \vec{0}$). Les équations de MAXWELL sont donc, en utilisant $\varepsilon_0 \mu_0 c^2 = 1$:

$$\begin{aligned}\operatorname{div} \vec{B} &= 0 \\ \overrightarrow{\operatorname{rot}} \vec{E} &= -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ \operatorname{div} \vec{E} &= 0 \\ \overrightarrow{\operatorname{rot}} \vec{B} &= \frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}\end{aligned}$$

Prenons le rotationnel membre à membre de la deuxième équation et utilisons la formule $\overrightarrow{\operatorname{rot}}(\overrightarrow{\operatorname{rot}} \vec{V}) = \overrightarrow{\operatorname{grad}}(\operatorname{div} \vec{V}) - \Delta \vec{V}$; on tire :

$$\overrightarrow{\operatorname{grad}}(\operatorname{div} \vec{E}) - \Delta \vec{E} = -\overrightarrow{\operatorname{rot}} \left(\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \right) = -\frac{\partial (\overrightarrow{\operatorname{rot}} \vec{B})}{\partial t}$$

puis grâce aux troisième et quatrième équations :

$$\Delta \vec{E} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}$$

où l'on reconnaît l'équation de d'ALEMBERT tridimensionnelle. De la même façon, le rotationnel de la quatrième équation conduit à :

$$\overrightarrow{\operatorname{grad}}(\operatorname{div} \vec{B}) - \Delta \vec{B} = \frac{1}{c^2} \overrightarrow{\operatorname{rot}} \left(\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right) = \frac{1}{c^2} \frac{\partial (\overrightarrow{\operatorname{rot}} \vec{E})}{\partial t}$$

d'où, grâce à la première et la deuxième :

$$\Delta \vec{B} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2}$$

XIX-1.b Ondes planes progressives sinusoïdales

Cherchons des solutions où les champs ne dépendent que de x et de t ; on les appelle ondes planes car les surfaces d'onde, au sens où on les a définies en optique, sont des plans parallèles d'équation $x = Cte$. L'équation pour le champ électrique devient alors :

$$\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}$$

et il en est bien sûr de même pour le champ magnétique. De plus, sachant ce qu'est la dérivée d'un vecteur, chacune des composantes des deux champs, par exemple E_x vérifie :

$$\frac{\partial^2 E_x}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 E_x}{\partial t^2}$$

Comme solutions, on retrouvera les ondes stationnaires et les ondes progressives, sinusoïdales ou non ; mais on sait aussi que toutes ces solutions peuvent être considérées comme somme d'ondes progressives sinusoïdales. Ce sont donc celles-ci qu'on étudiera ici, par exemple, on aura : $E_x = E_1 \cos(\omega t - kx + \varphi_1)$ avec $k = \omega/c$ ou encore en notation complexe : $\underline{E}_x = \underline{E}_1 \exp j(\omega t - kx)$ avec $\underline{E}_1 = E_1 \exp(j\varphi_1)$ ou encore en introduisant le vecteur d'onde $\vec{k} = k \vec{e}_x = (\omega/c) \vec{e}_x$: $\underline{E}_x = \underline{E}_1 \exp j(\omega t - \vec{k} \cdot \overrightarrow{OM})$

XIX-1.c Structure de l'onde plane progressive sinusoïdale

A ce stade les équations de MAXWELL n'ont pas encore livré toutes leurs conséquences. Remarquons d'abord qu'en notation complexe, pour une onde en $\exp j(\omega t - kx)$, les opérateurs $\partial/\partial t$, $\partial/\partial x$, $\partial/\partial y$ et $\partial/\partial z$ peuvent se remplacer respectivement par $j\omega$, $-jk$, 0 et 0 et donc le vecteur symbolique $\vec{\nabla} = (\partial/\partial x)\vec{e}_x + (\partial/\partial y)\vec{e}_y + (\partial/\partial z)\vec{e}_z$ par $-jk\vec{e}_x = -j\vec{k}$ et donc les opérateurs $\text{div} = \vec{\nabla} \cdot$ et $\text{rot} = \vec{\nabla} \wedge$ par $-j\vec{k} \cdot$ et $-j\vec{k} \wedge$

Considérons le champ :

$$\vec{E} = \begin{vmatrix} \underline{E}_1 \exp j(\omega t - kx) \\ \underline{E}_2 \exp j(\omega t - kx) \\ \underline{E}_3 \exp j(\omega t - kx) \end{vmatrix}$$

L'équation $\text{div} \vec{E} = 0$ donne $-j\vec{k} \cdot \vec{E} = 0$ soit $\vec{k} \cdot \vec{E} = 0$ avec

$$\vec{k} = \begin{vmatrix} k \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix}$$

donc $k \underline{E}_1 \exp j(\omega t - kx) = 0$ soit $\underline{E}_1 = 0$. Le champ n'a donc pas de composante dans la direction de propagation ; rappelons qu'on qualifie une telle onde de transversale. La forme la plus générale du champ d'une onde électromagnétique plane progressive sinusoïdale est donc :

$$\vec{E} = \begin{vmatrix} 0 \\ \underline{E}_2 \exp j(\omega t - kx) \\ \underline{E}_3 \exp j(\omega t - kx) \end{vmatrix}$$

Et, puisque $\text{div} \vec{B} = 0$, il en est de même pour le champ magnétique.

L'équation $\text{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$ donne $-j\vec{k} \wedge \vec{E} = -j\omega \vec{B}$ soit, après simplification :

$$\begin{vmatrix} k \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix} \wedge \begin{vmatrix} 0 \\ \underline{E}_2 \exp j(\omega t - kx) \\ \underline{E}_3 \exp j(\omega t - kx) \end{vmatrix} = \omega \begin{vmatrix} 0 \\ \underline{B}_2 \exp j(\omega t - kx) \\ \underline{B}_3 \exp j(\omega t - kx) \end{vmatrix}$$

On en tire (avec $k = \omega/c$) :

$$\begin{vmatrix} 0 \\ \underline{B}_2 \exp j(\omega t - kx) \\ \underline{B}_3 \exp j(\omega t - kx) \end{vmatrix} = \frac{1}{c} \begin{vmatrix} 0 \\ -\underline{E}_3 \exp j(\omega t - kx) \\ \underline{E}_2 \exp j(\omega t - kx) \end{vmatrix}$$

qu'on peut aussi écrire vectoriellement :

$$\vec{B} = \frac{1}{c} \vec{e}_x \wedge \vec{E}$$

On en déduit que dans le plan Oyz on passe du champ électrique au champ magnétique par une similitude d'angle $\pi/2$ et de rapport $1/c$.

Une onde plane progressive non sinusoïdale est somme d'ondes sinusoïdales ; pour chacun des termes de la somme, la propriété précédente est vrai ; il en est donc de même pour la somme. Retenons donc que c'est vrai pour toute onde plane progressive dans le vide.

Remarque : la quatrième équation, traitée comme les trois autres, ne permettrait rien de plus que retrouver $k = \omega/c$

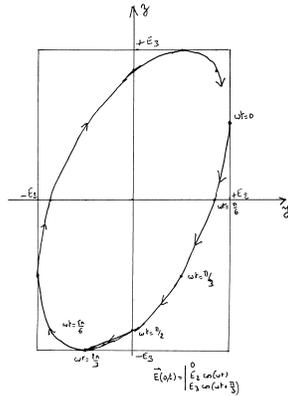
XIX-1.d Polarisation des ondes transversales

Revenons aux notations réelles, le champ électrique est :

$$\begin{pmatrix} 0 \\ E_2 \cos(\omega t - kx + \varphi_2) \\ E_3 \cos(\omega t - kx + \varphi_3) \end{pmatrix}$$

Plaçons nous en une abscisse x donnée ; en changeant l'origine des temps, on arrive aisément à quelque chose du type :

$$\begin{pmatrix} 0 \\ E_2 \cos(\omega t) \\ E_3 \cos(\omega t + \varphi) \end{pmatrix}$$



Si nous traçons sur un schéma l'ensemble des extrémités du champ électrique (à partir d'une origine commune), on obtient une ellipse. Inutile de faire de longs calculs puisqu'on retrouve le résultat classique d'un oscilloscope avec deux signaux déphasés sur les deux voies et placé en mode X-Y. On dit que l'onde est polarisée elliptiquement, ce qui du reste n'est pas un renseignement, puisqu'il s'agit du cas le plus général. Si, au cours du temps, l'ellipse est parcourue dans le sens positif, c'est-à-dire de Oy vers Oz , on dit qu'on a affaire à une onde elliptique directe (naguère, on disait gauche) sinon il s'agit d'une polarisation elliptique indirecte (ou droite). Pour savoir dans quel sens on tourne on peut comparer ce qui se passe à $t = 0$ où :

$$\vec{E} = \begin{pmatrix} 0 \\ E_2 \\ E_3 \cos(\varphi) \end{pmatrix}$$

et à $t = T/4 = \pi/(2\omega)$ où :

$$\vec{E} = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ E_3 \cos(\pi/2 + \varphi) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ -E_3 \sin(\varphi) \end{vmatrix}$$

On tourne donc dans le sens indirect si $\sin \varphi$ est positif (cf schéma).

polarisations rectilignes

Un premier cas particulier est celui où $\varphi = 0$ ou π et donc où l'ellipse se réduit à un segment. Bien sûr dans ce cas, on choisit Oy ou Oz parallèle à ce segment. On dit évidemment qu'on a affaire à une polarisation rectiligne. On a par exemple :

$$\vec{E} = \begin{vmatrix} 0 \\ \underline{E}_2 \exp j(\omega t - kx) \\ 0 \end{vmatrix}$$

Il est important de remarquer qu'une onde de polarisation elliptique peut être considérée comme (donc se décomposer en) une somme de deux ondes polarisées rectilignement dans deux directions orthogonales ; en effet :

$$\begin{vmatrix} 0 \\ \underline{E}_2 \exp j(\omega t - kx) \\ \underline{E}_3 \exp j(\omega t - kx + \varphi) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 \\ \underline{E}_2 \exp j(\omega t - kx) \\ 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ \underline{E}_3 \exp j(\omega t - kx + \varphi) \end{vmatrix}$$

polarisations circulaires

Un autre cas particulier est celui où $\varphi = \pm \pi/2$ et $|\underline{E}_2| = |\underline{E}_3|$ et où donc l'ellipse se réduit à un cercle. On dit qu'on a affaire selon le sens de rotation (cf supra) à un polarisation circulaire directe (on dit encore gauche) ou bien indirecte (on dit encore droite). Avec $\exp(j\pi/2) = j$, on a :

$$\vec{E} = \begin{vmatrix} 0 \\ \underline{E}_2 \exp j(\omega t - kx) \\ \pm j \underline{E}_2 \exp j(\omega t - kx) \end{vmatrix}$$

ou encore en notation réelle avec un choix convenable de l'origine des temps :

$$\vec{E} = \begin{vmatrix} 0 \\ E_2 \cos(\omega t - kx) \\ \pm E_2 \sin(\omega t - kx) \end{vmatrix}$$

Là aussi, il est important de remarquer qu'une onde polarisée rectilignement est somme de deux ondes polarisées circulairement et tournant en sens inverse ; en effet (en notation réelles, car le couple cos-sin met bien en évidence le cercle) :

$$\begin{vmatrix} 0 \\ E_0 \cos(\omega t - kx) \\ 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 \\ 1/2 E_0 \cos(\omega t - kx) \\ 1/2 E_0 \sin(\omega t - kx) \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 \\ 1/2 E_0 \cos(\omega t - kx) \\ -1/2 E_0 \sin(\omega t - kx) \end{vmatrix}$$

On en déduit aisément que toute onde polarisée elliptiquement se décompose en deux circulaires.

étude et modification de la polarisation d'une onde

Ce sera l'objet d'un TP-cours spécifique (chapitre suivant).

XIX-1.e Aspects énergétiques

Rappelons que le calcul des grandeurs énergétiques nécessite des produits de fonctions sinusoïdales et qu'il est dès lors indispensable de revenir aux notations réelles ; l'oublier serait catastrophique.

Pour alléger l'exposé, prenons le cas d'une onde polarisée rectilignement, soit en tenant compte de ce qui précède :

$$\vec{E} = \begin{vmatrix} 0 \\ E_0 \cos(\omega t - kx) \\ 0 \end{vmatrix} \quad \text{et donc} \quad \vec{B} = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ (E_0/c) \cos(\omega t - kx) \end{vmatrix}$$

La densité volumique d'énergie est :

$$u = \frac{1}{2} \varepsilon_0 \vec{E}^2 + \frac{1}{2 \mu_0} \vec{B}^2 = \frac{1}{2} E_0^2 \left(\varepsilon_0 + \frac{1}{\mu_0 c^2} \right) \cos^2(\omega t - kx) = \varepsilon_0 E_0^2 \cos^2(\omega t - kx)$$

grâce à $\varepsilon_0 \mu_0 c^2 = 1$

et en moyenne dans le temps :

$$\langle u \rangle = \frac{1}{2} \varepsilon_0 E_0^2$$

Le vecteur de POYNTING ($\vec{\Pi} = \frac{1}{\mu_0} \vec{E} \wedge \vec{B}$) est :

$$\vec{\Pi} = \frac{1}{\mu_0} \begin{vmatrix} 0 \\ E_0 \cos(\omega t - kx) \\ 0 \end{vmatrix} \wedge \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ (E_0/c) \cos(\omega t - kx) \end{vmatrix} = \frac{1}{\mu_0 c} \begin{vmatrix} E_0^2 \cos^2(\omega t - kx) \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix}$$

et en moyenne dans le temps :

$$\langle \vec{\Pi} \rangle = \frac{E_0^2}{2 \mu_0 c} \vec{e}_x = \frac{\varepsilon_0 c E_0^2}{2} \vec{e}_x$$

Par analogie avec $\vec{j} = \rho \vec{v}$ qu'on verra en mécanique des fluides et $\vec{j} = \sum_i \rho_i \vec{v}_i$ qu'on a vu en électromagnétisme (et l'on rappelle qu'on a déjà détaillé les analogies entre ρ et u d'une part, entre \vec{j} et $\vec{\Pi}$ d'autre part), par analogie donc, on peut définir une vitesse de l'énergie par $\vec{\Pi} = u \vec{V}_E$, les résultats précédents conduisent alors à $\vec{V}_E = c \vec{e}_x$, ce qui n'est guère surprenant.

Ordres de grandeurs

Par une journée de fort ensoleillement sous nos latitudes, le sol reçoit du soleil une puissance surfacique de 1 kW.m^{-2} , ce qui correspond à la valeur moyenne du vecteur de POYNTING, soit en module $\frac{1}{2\mu_0 c} E_{max}^2$; avec $2\mu_0 c = 8\pi \cdot 10^{-7} \cdot 2,997 \cdot 10^8 \approx 10^3$, on en déduit $E_{max} \approx 1 \text{ kV.m}^{-1}$ et $B_{max} = E_{max}/c \approx 3 \mu\text{T}$. Le champ électrique est élevé, mais aux fréquences concernées de l'ordre de 10^{15} Hz (cf optique physique, c'est sans danger car la matière n'arrive pas à «suivre» et n'absorbe pas, on y reviendra quand on étudiera la diffusion de la lumière au chapitre suivant). Le champ magnétique, lui, est bien inférieur au champ magnétique terrestre (environ $50 \mu\text{T}$)

Autre exemple : un émetteur de puissance moyenne P , si l'on suppose son émission isotrope, réparti, à une distance R cette puissance sur une sphère de surface $4\pi R^2$; à cette distance on a donc une puissance surfacique $\Pi = P/(4\pi R^2) \approx P/(10 R^2)$.

L'émetteur parisien de Radio-Classique, sur la Tour EIFFEL, a une puissance de 10 kW , au pied de la Tour, on a donc environ $\Pi = 10^{-2} \text{ W.m}^{-2}$ (d'où 3 V.m^{-1} et 10 nT); à Saint-Maur, à une dizaine de kilomètres, $\Pi = 10^{-5} \text{ W.m}^{-2}$ (d'où $0,1 \text{ V.m}^{-1}$ et $0,3 \text{ nT}$).

Pour un téléphone portable (1 W) à 10 cm du cerveau, on a $\Pi = 10 \text{ W.m}^{-2}$ (d'où 100 V.m^{-1} et $1 \mu\text{T}$)

XIX-2 Ondes dans un métal

XIX-2.a Loi d'OHM locale et conséquences

Dans un conducteur ohmique, la densité de courant est proportionnelle au champ électrique, le coefficient de proportionnalité est appelé conductivité électrique, notée γ . Nous considérons ici que c'est une loi phénoménologique, c'est-à-dire validée par la vérification expérimentale de ses conséquences théoriques. Sa justification à l'échelle atomique est hors programme; nous en donnerons néanmoins quelques idées lors de l'étude de l'induction électromagnétique.

La première conséquence est que sur un très large domaine de fréquences, on est dans l'approximation des régimes quasi-stationnaires; en effet, il suffit pour cela que :

$$\|\varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}\| \ll \|\gamma \vec{E}\|$$

soit avec un champ du type $\vec{E} = \underline{E}_m \exp j(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{OM}) \vec{e}_x$:

$$|j\omega \varepsilon_0 \underline{E}_m| \ll |\gamma \underline{E}_m|$$

$$\omega \varepsilon_0 |\underline{E}_m| \ll \gamma |\underline{E}_m|$$

$$2\pi \varepsilon_0 f \ll \gamma$$

$$f \ll \frac{2\gamma}{4\pi \varepsilon_0}$$

Dans le cas du cuivre ($\gamma = 6,3 \cdot 10^7 \text{ S.m}^{-1}$) et avec $\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \approx 9 \cdot 10^9$, la condition est $f \ll 5,7 \cdot 10^{17} \text{ Hz}$, disons $f \leq 6,10^{15} \text{ Hz}$, ce qui correspond à des longueurs d'onde *dans le vide* $\lambda = cT = c/f \geq 0,5; 10^{-7} \text{ m} = 0,05 \mu\text{m} = 50 \text{ nm}$, l'approximation est donc valable pour les fréquences industrielles, les fréquences hertziennes (radio, TV, radar, etc.), l'infra-rouge, le visible et le proche ultra-violet !

Une autre conséquence est que le milieu est électriquement neutre ($\rho = 0$). Physiquement, c'est aisé à comprendre : les électrons de la liaison métallique peuvent se déplacer librement. Comme ils sont repoussés par les zones positives et attirés par les zones positives, ils vont se déplacer des zones où ils sont en excès vers celles où ils font défaut, ce déplacement est dans le sens d'un retour à l'équilibre et comme on sait qu'il y a dissipation d'énergie par effet JOULE, on sait bien que tôt ou tard, on atteindra l'équilibre. Quantifions maintenant le phénomène, la démonstration est courte et astucieuse (comprendre qu'il faut l'apprendre par cœur). On part de l'équation de conservation de la masse, on y reporte $\vec{j} = \gamma \vec{E}$ puis la troisième équation de MAXWELL :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div} \vec{j} = 0$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \gamma \text{div} \vec{E} = 0$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\gamma}{\epsilon_0} \rho = 0$$

dont la solution est :

$$\forall M \rho(M, t) = \rho(M, 0) \exp(-t/\tau)$$

avec $\tau = \epsilon_0/\gamma$; ρ est donc négligeable au bout de 7τ , soit de l'ordre de 10^{-18} s dans le cas du cuivre !

XIX-2.b Effet de peau

Les équations de MAXWELL dans un tel milieu sont donc :

$$\text{div} \vec{B} = 0$$

$$\text{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$$\text{div} \vec{E} = 0 \text{ car } \rho = 0$$

$$\text{rot} \vec{B} = \mu_0 \vec{j} = \mu_0 \gamma \vec{E} \text{ (quasi permanent et loi d'Ohm)}$$

Prenons, comme plus haut, le rotationnel de la deuxième :

$$\text{rot}(\text{rot} \vec{E}) = \text{grad}(\text{div} \vec{E}) - \Delta \vec{E} = -\text{rot} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = -\frac{\partial \text{rot} \vec{B}}{\partial t} = -\mu_0 \gamma \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

soit, grâce à la troisième et un changement de signe :

$$\Delta \vec{E} = \mu_0 \gamma \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

qu'on appelle *équation-pilote* de ce milieu. Par rapport à l'équation de d'ALEMBERT, la dérivée seconde temporelle est remplacée par une dérivée première ; nous y reviendrons en détail quand nous étudierons les phénomènes de diffusion. Ne manquez pas, si vous relisez ce chapitre lors de vos révisions, d'aller consulter le chapitre sur la diffusion. Allons même jusqu'à rêver qu'un jour ce cours soit enregistré sur CD et que cette remarque soit remplacée par un lien hyper-texte.

Plaçons nous dans le cas d'un plan d'équation $x = 0$ séparant côté $x < 0$ le vide (en pratique l'air) et de l'autre ($x > 0$) un métal et étudions la possibilité d'une onde plane se propageant orthogonalement au plan et polarisée rectilignement (pour alléger les calculs), soit en notation complexe :

$$\vec{E} = \underline{E} \exp j(\omega t - k x) \vec{e}_y$$

En projection sur Oy , l'équation-pilote donne :

$$(-jk)^2 \underline{E} \exp j(\omega t - k x) = \mu_0 \gamma (j\omega) \underline{E} \exp j(\omega t - k x)$$

soit $k^2 = -j\mu_0 \gamma \omega = \mu_0 \gamma \omega \exp(-j\pi/2)$ d'où

$k = \sqrt{\mu_0 \gamma \omega} \exp(-j\pi/4) = \sqrt{\mu_0 \gamma \omega} (\sqrt{2}/2 - j\sqrt{2}/2) = \sqrt{\mu_0 \gamma \omega/2} (1 - j)$, en se rappelant qu'il est plus aisé de calculer la racine carrée d'un complexe lorsqu'on exprime celui-ci en module et argument).

Notons pour alléger $k = \kappa - j\kappa$ et reportons dans l'expression du champ avec $\underline{E} = E_m \exp j\varphi$, on obtient :

$$\vec{E} = E_m \exp j[\omega t - (\kappa - j\kappa)x + \varphi] \vec{e}_y = E_m \exp(-\kappa x) \exp j(\omega t - \kappa x + \varphi) \vec{e}_y$$

soit, en notation réelle :

$$\vec{E} = E_m \exp(-\kappa x) \cos(\omega t - \kappa x + \varphi) \vec{e}_y$$

On reconnaît une propagation amortie, l'onde est divisée par un facteur 1000 (et devient négligeable au delà) à une abscisse, appelée profondeur de pénétration :

$$\delta = \ln(1000)/\kappa = \ln(1000) \sqrt{\frac{2}{\mu_0 \gamma \omega}} = \ln(1000)/\sqrt{\pi \mu_0 \gamma f}$$

Une application numérique s'impose ; on rappelle que $\ln(1000) = 6,9$ et que $\mu_0 = 4\pi 10^{-7}$, on a pour le cuivre $\gamma = 6,3 \cdot 10^7 \text{ S.m}^{-1}$:

- à la fréquence industrielle de 50 Hz, $\delta = 62 \text{ mm}$
- aux fréquences radio FM ou TV, disons à 100 MHz, $\delta = 44 \mu\text{m}$
- aux fréquences optiques disons à $0,5 \cdot 10^{15} \text{ Hz}$, $\delta = 20 \text{ nm}$

Ces résultats restent valables pour une surface de séparation air/métal non plane, pourvu que son rayon de courbure soit grand devant δ . Les phénomènes électromagnétiques restent cantonnés dans une «peau» d'épaisseur δ à la surface des métaux. Pour un fil cylindrique conducteur de rayon r , ce n'est pas gênant si $\delta \gg r$, la gêne est supportable si $\delta \approx r$ et c'est franchement nuisible si $\delta \ll r$ (la surface utile traversée par le courant passe de πr^2 à l'aire d'une couronne de l'ordre de $2\pi r \delta$ et la résistance augmente d'autant)

Par exemple à la fréquence du réseau EDF, pour les fils domestiques de surfaces normalisées à 1,5 mm² pour l'éclairage, à 2,5 mm² pour les prises de courant et 4 mm² pour les fours ou plaques électriques, soit des rayons de 0,7 mm, 0,9 mm et 1,1 mm, tout va très bien ($\delta = 62$ mm).

Par contre aux fréquences FM ou TV seule une peau de 44 μm «travail» ; en fait on utilise plutôt des conducteurs creux (cable coaxial, antenne télescopique). On pourra retenir qu'une feuille d'aluminium alimentaire (d'épaisseur 50 μm) empêche toute écoute de la première symphonie, dite «Titan», de Gustav MAHLER sur Radio-Classique (101.1 MHz).

XIX-2.c Complément : Etude énergétique

Cette étude gagnerait à être traitée en TD.

Revenons à l'onde de champ électrique $\vec{E} = \underline{E} \exp j(\omega t - kx) \vec{e}_y$ avec $k = \kappa - j\kappa$ et $\kappa = \sqrt{\mu_0 \gamma \omega / 2}$. La seconde équation de MAXWELL donne, en notation complexe $-j \vec{k} \wedge \vec{E} = -j\omega \vec{B}$ d'où :

$$\vec{B} = (k/\omega) \vec{e}_x \wedge \underline{E} \exp j(\omega t - kx) \vec{e}_y = (k/\omega) \underline{E} \exp j(\omega t - kx) \vec{e}_z$$

Calculons maintenant le vecteur de POYNTING qui nécessite, on ne le répétera jamais assez, un retour aux notations réelles ; pour le champ électrique, pas de problème, avec $\underline{E} = E_m \exp j\varphi$, on obtient (cf supra) :

$$\vec{E} = E_m \exp(-\kappa x) \cos(\omega t - \kappa x + \varphi) \vec{e}_y$$

Pour le champ magnétique, c'est plus délicat, on a :

$$\vec{B} = (\kappa - j\kappa) E_m / \omega \exp(-\kappa x) \exp j(\omega t - \kappa x + \varphi) \vec{e}_z$$

dont la partie réelle est :

$$\vec{B} = \kappa E_m / \omega \exp(-\kappa x) [\cos(\omega t - \kappa x + \varphi) + \sin(\omega t - \kappa x + \varphi)] \vec{e}_z$$

d'où :

$$\vec{\Pi}(x, t) = \frac{\kappa E_m^2}{\mu_0 \omega} \exp(-2\kappa x) [\cos^2(\omega t - \kappa x + \varphi) + \sin(\omega t - \kappa x + \varphi) \cdot \cos(\omega t - \kappa x + \varphi)] \vec{e}_x$$

dont la moyenne temporelle est :

$$\langle \vec{\Pi}(x, t) \rangle = \frac{\kappa E_m^2}{2\mu_0 \omega} \exp(-2\kappa x) \vec{e}_x$$

Bien sûr, on constate que, comme l'onde, la puissance surfacique moyenne transportée (intensité lumineuse en optique, rappelons-le) décroît exponentiellement avec la distance parcourue. Allons plus loin en anticipant sur un mode de raisonnement que nous systématiserons dans le chapitre sur les bilans pour des systèmes ouverts. Considérons un volume cylindrique d'axe Ox de surface S compris entre les abscisses x et $x + dx$ et faisons un bilan énergétique

entre les instants t et $t + dt$. En moyenne temporelle, il entre, en notant $\langle \vec{\Pi} \rangle = \langle \Pi \rangle \vec{e}_x$, une énergie $\langle \Pi(x, t) \rangle S dt$ à l'abscisse x et il sort une énergie $\langle \Pi(x + dx, t) \rangle S dt$ à l'abscisse $x + dx$; le bilan par unité de volume et de temps est donc l'absorption d'une puissance volumique :

$$\begin{aligned} (\langle \Pi(x, t) \rangle S dt - \langle \Pi(x + dx, t) \rangle S dt) / (S dx dt) &\approx -\frac{\partial \langle \Pi \rangle}{\partial x} = \dots \\ \dots &= \frac{\kappa^2 E_m^2}{\mu_0 \omega} \exp(-2 \kappa x) = (\gamma E_m^2 / 2) \exp(-2 \kappa x) \end{aligned}$$

Ce résultat est satisfaisant, car on sait que les charges absorbent la puissance volumique

$$\vec{j} \cdot \vec{E} = \gamma \vec{E}^2 = \gamma E_m^2 \exp(-2 \kappa x) \cos^2(\omega t - \kappa x + \varphi)$$

de moyenne temporelle :

$$\frac{\gamma E_m^2}{2} \exp(-2 \kappa x)$$

et l'on retrouve bien le même résultat; c'est beau la physique, non? En tout cas, moi, je ne m'en lasse pas!

Du reste la démonstration est possible aussi, quoique plus calculatoire, en valeur instantanée.

XIX-2.d Modèle du métal parfait

Si l'épaisseur de l'effet de peau est négligeable devant la taille du conducteur, on peut la considérer comme nulle; or faire tendre $\delta = \ln(1000) / \sqrt{\pi \mu_0 \gamma f}$ vers 0 revient formellement à faire tendre la conductivité γ vers l'infini. Un conducteur parfait est donc un conducteur de conductivité infinie. La conséquence pour le champ électrique est très simple: en réécrivant la loi d'OHM $\vec{E} = \vec{j} / \gamma$ et en faisant tendre γ vers l'infini, on en déduit que le champ électrique dans un conducteur parfait est nul. Pour le champ magnétique, dans un contexte quelconque, la seconde équation de MAXWELL avec un champ électrique nul conduit à :

$$\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \vec{0}$$

donc à un champ magnétique stationnaire. Dans un contexte purement sinusoïdal de pulsation ω , c'est encore plus simple puisque la relation précédente devient :

$$j \omega \vec{B} = \vec{0}$$

donc à un champ magnétique lui aussi nul.

Reste à discuter la validité du modèle, soit pour un conducteur dont la taille caractéristique est L :

$$\delta = \ln(1000) / \sqrt{\pi \mu_0 \gamma f} \ll L$$

La condition ne porte pas que sur le conducteur par l'intermédiaire de sa taille et de sa conductibilité mais aussi sur la fréquence du phénomène étudié ; on doit avoir :

$$f \gg \frac{\ln(1000)^2}{\pi \mu_0 \gamma L^2}$$

disons

$$f \geq 100 \frac{\ln(1000)^2}{\pi \mu_0 \gamma L^2}$$

soit pour le cuivre (voir données plus haut)

$$f_{(Hz)} \geq 20/L_{(m)}^2$$

Un fil de cuivre cylindrique de rayon 1 cm pourra être considéré comme un métal parfait au delà de 200 kHz ; le courant sera alors localisé à la surface du cuivre et le fil pourra parfaitement être creux, on est dans la technologie du câble coaxial. Pour l'eau de mer de conductivité faible $\gamma = 10^{-3} \text{ Sm}^{-1}$ et pour un océan de profondeur 10 km, c'est un conducteur parfait au delà de 12 kHz ; en anticipant sur le chapitre suivant, cela voudra dire que les ondes radio au delà de 12 kHz se réfléchiront sur l'océan comme sur une surface métallique.

Une autre condition de validité pourrait être $\delta \ll \lambda = 2\pi c/\omega$. Le même type de calcul conduit, pour le cuivre à $f \ll 5 \cdot 10^{17} \text{ Hz}$, ce qui est vérifié dans le domaine de validité de la loi d'OHM. Donc cette condition ne pose pas problème.

XIX-3 Ondes dans un diélectrique

XIX-3.a Charges libres et liées

La matière est composée de noyaux positifs et d'électrons négatifs. Ces composants se regroupent en entités neutres (atomes ou molécules) ou chargées (ions positifs ou négatifs, électrons isolés). Les entités chargées peuvent avoir des mouvements très limités, inférieurs à l'ordre de grandeur de la distance interatomique (il s'agit surtout de l'agitation thermique) ou au contraire des mouvements d'amplitude mésoscopique, certes petite devant la taille humaine, mais grande devant la distance interatomique. Il s'agit en pratique :

- des électrons périphériques des métaux,
- des ions d'une solution ionique,
- des ions et électrons provenant de la dissociation des atomes ou molécules d'un gaz soit qu'il est à très haute température (un plasma chaud), soit qu'il subit un bombardement de particules de haute énergie (plasma froid, comme l'ionosphère).

C'est ce type de charges qu'on appelle charges libres. Les milieux contenant des charges libres sont bien sûr conducteurs, ils vérifient ou non la loi d'OHM ; typiquement les milieux ohmiques sont les métaux et les solutions ioniques et les milieux non ohmiques sont les plasmas.

Les autres charges s'appellent charges liées. Dans la pratique, ou bien le milieu contient des charges libres et leur effet masque celui des charges liées,

dont il est dès lors inutile de parler, c'est un milieu conducteur ou bien il n'en contient pas et on a affaire à un milieu à charges liées sans charges libres.

XIX-3.b Vecteur polarisation

Considérons donc un milieu sans charges libres et constitué uniquement d'entités neutres (atomes ou molécules). Chaque entité peut cependant avoir des propriétés électriques et magnétiques non négligeables. Si le barycentre des charges positives et celui des charges négatives ne sont pas confondus, l'entité a le comportement d'un dipôle électrique ; si les charges bougent à l'intérieur de l'entité (mouvement orbital des électrons par exemple), elle a le comportement d'un dipôle magnétique. Dans le premier cas, on dit avoir affaire à un matériau *diélectrique* et dans le second, à un matériau *magnétique*. Il se trouve qu'à quelques rares exceptions près, le comportement magnétique de la matière peut être négligé (le matériau est dit non magnétique) ; on peut aussi négliger le comportement diélectrique des gaz qui, pour l'électromagnétisme, peuvent être assimilés au vide ; par contre le comportement diélectrique des liquides et des solides a des conséquences bien visibles. Nous étudierons donc les *diélectriques non magnétiques*.

Considérons un volume élémentaire $d\Omega$ contenant des entités neutres mais ayant le comportement d'un dipôle qu'on schématise par une charge $-q_i$ en A_i et une charge $+q_i$ en B_i , donc de moment dipolaire $\vec{p}_i = q_i \overrightarrow{A_i B_i}$. Le moment dipolaire total élémentaire de $d\Omega$ est $d\vec{p}_{tot} = \sum_i \vec{p}_i = \sum_i q_i \overrightarrow{A_i B_i} = \sum_i q_i (\overrightarrow{OB_i} - \overrightarrow{OA_i})$. Cessons de faire la différence entre charges positives et négatives en notant (Q_k, M_k) tantôt le couple $(+q_i, B_i)$, tantôt le couple $(-q_i, A_i)$. Alors :

$$d\vec{p}_{tot} = \sum_k Q_k \overrightarrow{OM_k}$$

Si $d\Omega$ est assez petit et qu'on le "casse" en deux parties égales, $d\vec{p}_{tot}$ va se partager lui aussi en deux moitiés égales, donc $d\vec{p}_{tot}$ est localement proportionnel au volume $d\vec{p}_{tot}$; il est donc naturel de faire apparaître leur rapport, qui est une densité volumique de moment dipolaire électrique, et, comme c'est long à dire, qu'on baptise vecteur polarisation, traditionnellement noté \vec{P} , et qui dépend a priori de la position du point M , centre de $d\Omega$, on note donc ce champ $\vec{P}(M)$. Il vaut :

$$\vec{P}(M) = \frac{1}{d\Omega} \sum_{Q_k \in d\Omega} Q_k \overrightarrow{OM_k}$$

XIX-3.c Courant et charges de polarisation

Supposons maintenant que les charges se déplacent (avec des mouvements dont l'ampleur ne dépasse toutefois pas la distance interatomique) et calculons la dérivée temporelle du vecteur polarisation calculé comme précédemment, on a :

$$\frac{\partial \vec{P}(M)}{\partial t} = \frac{1}{d\Omega} \sum_{Q_k \in d\Omega} Q_k \vec{V}_k$$

Dans cette somme regroupons les charges par types de charges (électrons et noyaux en fait). Pour un type, noté α , définissons une vitesse moyenne par :

$$\sum_{Q_k \text{ de type } \alpha} (Q_k \vec{V}_k) = \left(\sum_{Q_k \text{ de type } \alpha} Q_k \right) \vec{V}_{m\alpha}$$

or la densité volumique de charges de type α est définie par :

$$\rho_\alpha = \frac{1}{d\Omega} \sum_{Q_k \text{ de type } \alpha} Q_k$$

d'où :

$$\sum_{Q_k \text{ de type } \alpha} (Q_k \vec{V}_k) = d\Omega \rho_\alpha \vec{V}_{m\alpha}$$

on fait cela pour l'autre type de charges et l'on reporte dans $\partial \vec{P}(M)/\partial t$:

$$\frac{\partial \vec{P}(M)}{\partial t} = \rho_\alpha \vec{V}_{m\alpha} + \rho_\beta \vec{V}_{m\beta}$$

où l'on reconnaît la définition du vecteur densité de courant (dû uniquement aux charges liées, il faudra, le cas échéant, lui ajouter la densité de courant des charges libres). On note habituellement :

$$\vec{j}_{pol} = \frac{\partial \vec{P}}{\partial t}$$

Considérons maintenant la formulation locale de la conservation de la charge. Attention, il n'est pas immédiat qu'il y ait conservation de la charge *liée*, car dans certains milieux (semi-conducteurs ou plasmas) on peut assister à la transformation de charges liées en charges libres ou inversement ; mais dans ce cas la transformation concerne une charge négative et une charge positive opposée, de sorte que la charge liée est bien conservée, bien que le nombre de charges liées varie.

De $\partial \rho / \partial t + \text{div } \vec{j} = 0$, on tire :

$$\partial \rho / \partial t = -\text{div } \vec{j} = -\text{div} \frac{\partial \vec{P}}{\partial t} = -\frac{\partial \text{div } \vec{P}}{\partial t}$$

En régime sinusoïdal, on en déduit que $j \omega \rho = -j \omega \text{div } \vec{P}$, donc que :

$$\rho = -\text{div } \vec{P}$$

Nous admettrons que cela reste vrai dans toutes les situations, essentiellement parce que la transformation de FOURIER permet de considérer toute fonction comme somme de sinusoides et que la même relation est valable pour chacune d'entre elles, donc pour la somme ; seul le terme indépendant du temps pose problème et c'est ce problème que nous escamoterons.

Retenons donc qu'à une polarisation \vec{P} sont associées une densité volumique de charges $\rho = -\text{div}\vec{P}$ et une densité de courant $\vec{j} = \frac{\partial \vec{P}}{\partial t}$

Une remarque en complément : dans un milieu magnétique, c'est-à-dire où le comportement dipolaire magnétique est non négligeable, il faudrait ajouter à la densité de courant un terme complémentaire rendant compte des mouvements de charges intra-atomiques.

XIX-3.d Modèle de l'électron élastiquement lié

Considérons comme modèle de dipôle élémentaire \vec{p}_i l'assemblage d'une part d'un électron périphérique de masse m de charge $q_i = -e$ au point B_i et d'autre part d'un noyau accompagné d'électrons de couches internes, le tout de charge $-q_i = e$ au point A_i , avec $\vec{p}_i = q_i \overrightarrow{A_i B_i}$. Un noyau est formé d'un à quelques centaines de protons ou neutrons, chacun pesant près de 2000 fois plus qu'un électron, son inertie est donc suffisamment grande pour qu'on le considère comme immobile et qu'on le prenne pour origine du mouvement de l'électron. On notera $\vec{r} = \overrightarrow{A_i B_i}$. Mettons en équation le mouvement de l'électron soumis à l'action du champ électromagnétique d'une onde. Il est soumis à son poids, négligeable, à la force de LORENTZ, à une force fictive de rappel qui rend compte du fait que l'électron est lié au noyau et à une force fictive de frottement fluide qui simulera l'action de tous les phénomènes dissipatifs (chocs dus à l'agitation thermique, mais aussi et surtout énergie perdue par rayonnement, comme on le verra dans un chapitre proche). On a donc :

$$m \ddot{\vec{r}} = -e(\vec{E} + \dot{\vec{r}} \wedge \vec{B}) - \lambda \dot{\vec{r}} - k \vec{r}$$

Dans la pratique on peut négliger la force magnétique; en effet dans le vide on passe du module du champ électrique à celui du champ magnétique en divisant par la vitesse de la lumière. En ordre de grandeur, cela reste vrai dans un diélectrique. On a donc :

$$\frac{\|\dot{\vec{r}} \wedge \vec{B}\|}{\|\vec{E}\|} \leq \frac{\|\dot{\vec{r}}\| \|\vec{B}\|}{\|\vec{E}\|} \sim \frac{\|\dot{\vec{r}}\| (\|\vec{E}\|/c)}{\|\vec{E}\|} = \|\dot{\vec{r}}\|/c$$

et comme le mouvement de l'électron est loin d'être relativiste, l'action du champ magnétique est bien négligeable. on a donc :

$$m \ddot{\vec{r}} + \lambda \dot{\vec{r}} + k \vec{r} = -e \vec{E}$$

soit pour un champ sinusoïdal et en notation complexe :

$$[(j\omega)^2 m + j\omega \lambda + k] \underline{\vec{r}} = -e \underline{\vec{E}}$$

$$\underline{\vec{r}} = \frac{-e \underline{\vec{E}}}{(k - m\omega^2) + j\omega \lambda}$$

Il en résulte un moment dipolaire

$$\vec{p}_i = q_i \overrightarrow{A_i B_i} = -e \vec{r} = \frac{e^2}{(k - m\omega^2) + j\omega \lambda} \underline{\vec{E}}$$

qu'on note :

$$\vec{p}_i = \underline{\alpha} \vec{E}$$

Attention $\underline{\alpha} = e^2 / [(k - m\omega^2) + j\omega\lambda]$, appelée *polarisabilité* complexe est un coefficient complexe et non la formulation complexe d'un phénomène sinusoïdal comme le champ ou le moment dipolaire (Il s'agit du même problème de notation qu'en électrocinétique en sinusoïdal où l'on écrit volontiers $\underline{U} = \underline{Z} \underline{I}$). On fera bien sûr le lien avec le cours de chimie organique où la polarisabilité des liaisons joue un grand rôle.

Revenons au volume élémentaire $d\Omega$ contenant une densité particulière n_v de dipôles identiques, donc contenant $n_v d\Omega$ dipôles. Le moment dipolaire total donne accès au vecteur polarisation :

$$\begin{aligned} \vec{P} d\Omega &= d\vec{p}_{tot} = n_v d\Omega \underline{\alpha} \vec{E} \\ \vec{P} &= n_v \underline{\alpha} \vec{E} \end{aligned}$$

La notation traditionnelle est :

$$\vec{P} = \varepsilon_0 \underline{\chi}_e \vec{E}$$

avec

$$\underline{\chi}_e = \frac{n_v \underline{\alpha}}{\varepsilon_0} = \frac{n_v e^2}{\varepsilon_0 [(k - m\omega^2) + j\omega\lambda]}$$

où $\underline{\chi}_e$ est appelée *susceptibilité électrique* (complexe). Un diélectrique où, en amplitude complexe, il y a linéarité entre champ électrique et polarisation est dit *linéaire*. Il existe des cas où cette linéarité se traduit par une matrice de passage ; ici cette matrice est diagonale à coefficients diagonaux égaux et cela se ramène à une multiplication par un scalaire, on dit qu'on a affaire à un *diélectrique linéaire isotrope*, on rajoute souvent *homogène* pour préciser que χ_e ne dépend pas du point où l'on est.

XIX-3.e Onde dans un tel diélectrique

Etudions ici un milieu diélectrique linéaire isotrope homogène, non magnétique et sans charges libres. Tout cela semble certes beaucoup de conditions, mais il se trouve qu'une majorité de matériaux les vérifient. Dans les équations de MAXWELL, la densité volumique de charges et la densité de courant résultent de la polarisation. On a donc :

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \vec{B} &= 0 \\ \operatorname{rot} \vec{E} &= -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ \operatorname{div} \vec{E} &= \frac{\rho}{\varepsilon_0} = -\frac{\operatorname{div} \vec{P}}{\varepsilon_0} \\ \operatorname{rot} \vec{B} &= \mu_0 \left(\vec{j} + \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right) = \mu_0 \left(\frac{\partial \vec{P}}{\partial t} + \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right) = \end{aligned}$$

En amplitude complexe cela devient (avec $\frac{\partial}{\partial t} \rightarrow j\omega$, $\text{div} \rightarrow -j \vec{k} \cdot$ et $\text{rot} \rightarrow -j \vec{k} \wedge$) et après simplification par $-j$:

$$\begin{aligned}\vec{k} \cdot \vec{B} &= 0 \\ \vec{k} \wedge \vec{E} &= \omega \vec{B} \\ \vec{k} \cdot \vec{E} &= -\frac{1}{\varepsilon_0} \vec{k} \cdot \vec{P} \\ \vec{k} \wedge \vec{B} &= -\mu_0 \omega \left(\vec{P} + \varepsilon_0 \vec{E} \right)\end{aligned}$$

Reportons-y $\vec{P} = \varepsilon_0 \chi_e \vec{E}$ et remplaçons le produit $\mu_0 \varepsilon_0$ par $1/c^2$ où c désigne la vitesse de la lumière dans le vide, on a alors :

$$\begin{aligned}\vec{k} \cdot \vec{B} &= 0 \\ \vec{k} \wedge \vec{E} &= \omega \vec{B} \\ (1 + \chi_e) \vec{k} \cdot \vec{E} &= 0 \\ -\vec{k} \wedge \vec{B} &= \frac{\omega}{c^2} (1 + \chi_e) \vec{E}\end{aligned}$$

La première et la troisième relations montrent que l'onde plane progressive est toujours transversale dans le milieu étudié ; pour alléger l'exposé, nous la supposons polarisée rectilignement et nous choisissons l'axe Ox dans la direction de propagation et l'axe Oy parallèle au champ électrique de sorte que $\vec{k} = k \vec{e}_x$ et $\vec{E} = E \exp j(\omega t - kx) \vec{e}_y$

La troisième relation donne :

$$\vec{B} = \frac{k}{\omega} E \exp j(\omega t - kx) \vec{e}_z$$

Si l'on se souvient que la vitesse de phase est définie par $\frac{1}{V_\varphi} = \frac{k}{\omega}$, on retrouve formellement la même structure, au remplacement de c par V_φ près, que pour une onde dans le vide. Malheureusement, la suite montrera que k est complexe donc que c'est un peu plus compliqué. Néanmoins cette remarque reste un bon aide-mémoire.

Enfin la dernière relation donne :

$$\frac{k^2}{\omega} E \vec{e}_x = \frac{\omega}{c^2} (1 + \chi_e) E \vec{e}_x$$

soit après projection, simplification et mise en forme :

$$k^2 = (1 + \chi_e) \frac{\omega^2}{c^2}$$

Il est d'usage de noter $\varepsilon_r = 1 + \chi_e$ et de l'appeler *permittivité relative* (complexe) du diélectrique. On note aussi \underline{n} celle des deux racines du complexe ε_r qui a sa partie réelle positive. Alors :

$$k^2 = \varepsilon_r \frac{\omega^2}{c^2} = \underline{n}^2 \frac{\omega^2}{c^2}$$

$$k = \pm \underline{n} \frac{\omega}{c}$$

On retrouve la situation décrite dans le chapitre sur la dispersion et surtout l'absorption dont nous reprenons sans trop détailler les résultats. Le lecteur pourra évidemment s'y reporter pour rafraîchir sa mémoire.

Contentons-nous d'en rappeler les principaux résultats. Notons $n_1(\omega) = \text{Re}(\underline{n})$ et $n_2(\omega) = -\text{Im}(\underline{n})$, donc $\underline{n} = n_1(\omega) - j n_2(\omega)$ et par conséquent $k_1(\omega) = \text{Re}(\underline{k})$ et $k_2(\omega) = -\text{Im}(\underline{k})$, donc $\underline{k} = k_1(\omega) - j k_2(\omega)$ avec $k_1 = n_1 \omega / c$ et $k_2 = n_2 \omega / c$. Avec $\vec{E} = \underline{E} \vec{e}_y = E \exp j\varphi \vec{e}_y$, on a :

$$\vec{E} = \text{Re}(\vec{E}) = \dots = E \exp(-k_2 x) \cos(\omega t - k_1 x + \varphi) \vec{e}_y$$

L'onde se propage en s'amortissant avec une distance caractéristique $1/k_2$; pour les pulsations où l'amortissement n'est pas trop important, le milieu est dispersif avec une vitesse de phase donnée par $1/V_\varphi = k_1(\omega)/\omega$ et une vitesse de groupe par $1/V_g = dk_1(\omega)/d\omega$.

XIX-3.f Discussion du modèle

On a donc $k^2 = (1 + \underline{\chi}_e) \frac{\omega^2}{c^2}$ avec $\underline{\chi}_e = \frac{n_v e^2}{\varepsilon_0[(k - m\omega^2) + j\omega\lambda]}$

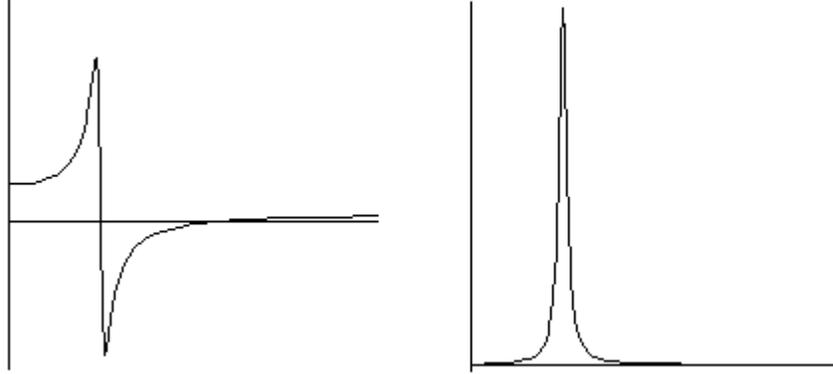
La suite n'est simple que pour un gaz car alors n_v est suffisamment petit pour que $|\underline{\chi}_e| \ll 1$ de sorte qu'un développement limité conduit à :

$$\begin{aligned} k &= (1 + \underline{\chi}_e/2) \frac{\omega}{c} = \left(1 + \frac{n_v e^2}{2 \varepsilon_0[(k - m\omega^2) + j\omega\lambda]} \right) \frac{\omega}{c} \\ k_1 &= \left(1 + \frac{(k - m\omega^2) n_v e^2}{2 \varepsilon_0[(k - m\omega^2)^2 + (\omega\lambda)^2]} \right) \frac{\omega}{c} \\ k_2 &= \frac{\omega \lambda n_v e^2}{2 \varepsilon_0[(k - m\omega^2)^2 + (\omega\lambda)^2]} \frac{\omega}{c} \\ n_1 &= 1 + \frac{(k - m\omega^2) n_v e^2}{2 \varepsilon_0[(k - m\omega^2)^2 + (\omega\lambda)^2]} \\ n_2 &= \frac{\omega \lambda n_v e^2}{2 \varepsilon_0[(k - m\omega^2)^2 + (\omega\lambda)^2]} \end{aligned}$$

Traçons les courbes $n_1(\omega)$ et $n_2(\omega)$: Il se trouve que ces courbes sont en bon accord avec les courbes expérimentales, à ceci près qu'un atome ou une molécule contient plusieurs électrons et qu'on observe une somme de fonctions de ce type, décalées les unes des autres. Pourtant le modèle semble sommaire. La liaison élastique noyau-électron semble fantaisiste, en fait le modèle de J.J. THOMSON (ne pas le confondre avec W. THOMSON, lord KELVIN), que nous verrons en exercice, explique ce comportement. Quant à la force dissipatrice, une théorie plus poussée montre qu'une force en $+\lambda d^3 \vec{r} / dt^3$ serait plus adaptée, mais le calcul montre que la courbe n'est guère modifiée.

N'oublions pas de remarquer que l'amplitude réelle locale $E_m(x) = E \exp(-k_2 x)$ est telle que :

$$\ln(E_m(0)/E_m(x)) = k_2 x = \frac{\omega \lambda n_v e^2}{2 \varepsilon_0[(k - m\omega^2)^2 + (\omega\lambda)^2]} \frac{\omega}{c} x = f(\omega) n_v x$$



Cette quantité est proportionnelle à la longueur parcourue (loi de BEER-LAMBERT) et, à fréquence donnée, à la concentration, c'est le principe des dosages par spectrophotométrie.

Remarquons aussi que n_2 , donc k_2 , donc l'absorption est négligeable en dehors d'un domaine restreint de fréquences, appelé *bande d'absorption*. Dans celle-ci, le matériau est opaque, en dehors, il est transparent.

XIX-3.g Complément : Aspects énergétiques

Repartons d'un champ électrique :

$$\vec{E} = E \exp j(\omega t - k x) \vec{e}_y$$

$$\vec{E} = E \exp(-k_2 x) \cos(\omega t - k_1 x + \varphi) \vec{e}_y$$

On a vu plus haut comment en déduire le champ magnétique :

$$\vec{B} = \frac{k}{\omega} E \exp j(\omega t - k x) \vec{e}_z = \frac{k_1 - j k_2}{\omega} E \exp j(\omega t - k x) \vec{e}_z$$

soit, en en prenant la partie réelle (même démarche qu'au paragraphe 2.c) :

$$\vec{B} = \frac{E}{\omega} \exp(-k_2 x) [k_1 \cos(\omega t - k_1 x + \varphi) + k_2 \sin(\omega t - k_1 x + \varphi)] \vec{e}_z$$

Toujours comme au paragraphe 2.c, le vecteur de POYNTING, sa moyenne temporelle et la puissance volumique moyenne absorbée sont :

$$\vec{\Pi} = \frac{E^2}{\mu_0 \omega} \exp(-2 k_2 x) [k_1 \cos^2(\omega t - k_1 x + \varphi) + k_2 \sin(\omega t - k_1 x + \varphi) \cos(\omega t - k_1 x + \varphi)] \vec{e}_x$$

$$\langle \Pi \rangle = \frac{k_1 E^2}{2 \mu_0 \omega} \exp(-2 k_2 x)$$

Les chimistes auront, bien sûr, reconnu au passage la loi de BEER-LAMBERT.

$$-\frac{\partial \langle \Pi \rangle}{\partial x} = \frac{k_1 k_2 E^2}{\mu_0 \omega} \exp(-2 k_2 x)$$

Là aussi c'est compatible avec la puissance volumique absorbée par les charges liées qui vaut ici :

$$\vec{j} \cdot \vec{E} = \frac{\partial \vec{P}}{\partial t} \cdot \vec{E}$$

En effet, on a successivement, en notant $\underline{\chi}_e = \chi_1 - j\chi_2$:

$$\underline{\vec{P}} = \varepsilon_0 \underline{\chi}_e \underline{\vec{E}}$$

$$\overline{\partial \underline{P} / \partial t} = j\omega \underline{\vec{P}} = j\omega \varepsilon_0 (\chi_1 - j\chi_2) \underline{\vec{E}}$$

$$\vec{j} = \omega \varepsilon_0 E \exp(-k_2 x) [\chi_2 \cos(\omega t - k_1 x + \varphi) - \chi_1 \sin(\omega t - k_1 x + \varphi)] \vec{e}_y$$

$$\vec{j} \cdot \underline{\vec{E}} = \omega \varepsilon_0 E^2 \exp(-2k_2 x) [\chi_2 \cos^2(\omega t - k_1 x + \varphi) - \chi_1 \sin(\omega t - k_1 x + \varphi) \cos(\omega t - k_1 x + \varphi)]$$

$$\langle \vec{j} \cdot \underline{\vec{E}} \rangle = \frac{\chi_2 \omega \varepsilon_0 E^2}{2} \exp(-2k_2 x)$$

Or on a, en utilisant $\varepsilon_0 \mu_0 c^2 = 1$:

$$k^2 = (1 + \chi_e) (\omega^2 / c^2)$$

$$(k_1 - jk_2)^2 = (1 + \chi_1 - j\chi_2) \varepsilon_0 \mu_0 \omega^2$$

soit en égalant les parties imaginaires et en changeant de signe :

$$2k_1 k_2 = \chi_2 \varepsilon_0 \mu_0 \omega^2$$

$$\frac{k_1 k_2}{\mu_0 \omega} = \frac{\chi_2 \omega \varepsilon_0}{2}$$

ce qui permet l'identification des deux approches, c'est très beau la physique !